MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

académie Orléans-Tours

Olympiades nationales de mathématiques

Deuxième partie de l'épreuve : exercices académiques

10h10 à 12h10

Les candidats traitent **deux exercices :**

- Les candidats de la série S traitent les exercices numéros 4 (*L'arbre de Stern-Brocot*) et 5 (*Constructions*).
- Les candidats des autres séries traitent les exercices numéros 4 (*L'arbre de Stern-Brocot*) et 6 (*Des paniers surprises*).

L'exercice 4 (*L'arbre de Stern-Brocot*) comporte une annexe en page 7 à compléter et à rendre avec la copie.

Les copies concernant ces exercices académiques seront ramassées au plus tard à 12 h 10.

Exercice académique numéro 4 (à traiter par tous les candidats)

L'arbre de Stern-Brocot

I) Arbre de Stern-Brocot.

Définition : On appelle fraction *médiante* de deux fractions, la fraction qui est le quotient des numérateurs additionnés et des dénominateurs additionnés des deux fractions de départ. Pour des entiers *a, a', b, b'* on note $\frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'}$ la *médiante* de $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$. On a donc : $\frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} = \frac{a+a'}{b+b'}$

1) Calculer $\frac{13}{3} \oplus \frac{7}{12}$ et $\frac{37}{11} \oplus \frac{11}{37}$.

2) On part des deux fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ (bien que $\frac{1}{0}$ ne corresponde pas réellement à un nombre) et ensuite l'algorithme consiste à répéter pour chaque ligne l'instruction :

Recopier la ligne précédente en insérant entre deux fractions consécutives leur fraction médiante.

a) Complétez le tableau en annexe avec les premières étapes de cet algorithme.

b) On peut visualiser cette construction par un arbre binaire que l'on appelle *arbre de Stern-Brocot* où on ne représente à chaque génération que les nouvelles fractions.
Compléter l'arbre en annexe avec les fractions manquantes à la dernière génération.

2) On observe sur ces exemples qu'une fraction médiante se trouve entre les deux fractions qui lui ont donné naissance. Prouvons-le :

Soit deux fractions d'entiers positifs $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ avec $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ et b comme b' non nuls

a) Justifier que : $a'b - ab' > 0$.

b) En déduire que : $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} < \frac{a'}{b'}$.

II) Une base pour écrire les fractions.

On admet que toutes les fractions irréductibles positives apparaissent quelque part dans cet arbre.

Codage droite-gauche. *On peut coder chaque fraction par un mot comportant uniquement les lettres* D *et* G *qui décrit le chemin qu'il faut suivre dans l'arbre en partant de* 1/1 *pour atteindre cette fraction en allant soit à gauche* (G) *soit à droite* (D).

Exemples : 2/3 se code en GD, 3/2 en DG, 5/3 en DGD et DD correspond à 3/1.

1) À quelle fraction correspond le mot GGD?

2) Quel est le code qui correspond à la fraction 7/3? À la fraction 1/7?

3) Justifier que le code pour 13/6 commence par DDG. Déterminer son code complet.

4) Pour n entier naturel non nul on note A_n le mot qui comporte n lettres avec des alternances droite-gauche, en commençant par la lettre D:

A_1=D, A_2=DG, A_3=DGD, A_4=DGDG, A_5=DGDGD, …

Donner les fractions qui correspondent aux mots A_n pour n allant de 1 à 8.

III) Opérations sur le code et les fractions.

À un code on associe la fraction correspondante. Par exemple : DGD ↦ 5/3. On notera alors $\mathcal{F}$(DGD)=5/3. On considère alors deux opérations sur les mots M de code :

① On met un D au début du mot : $M \mapsto$ DM. ② On échange les lettres D et G du mot : $M \mapsto \overline{M}$.

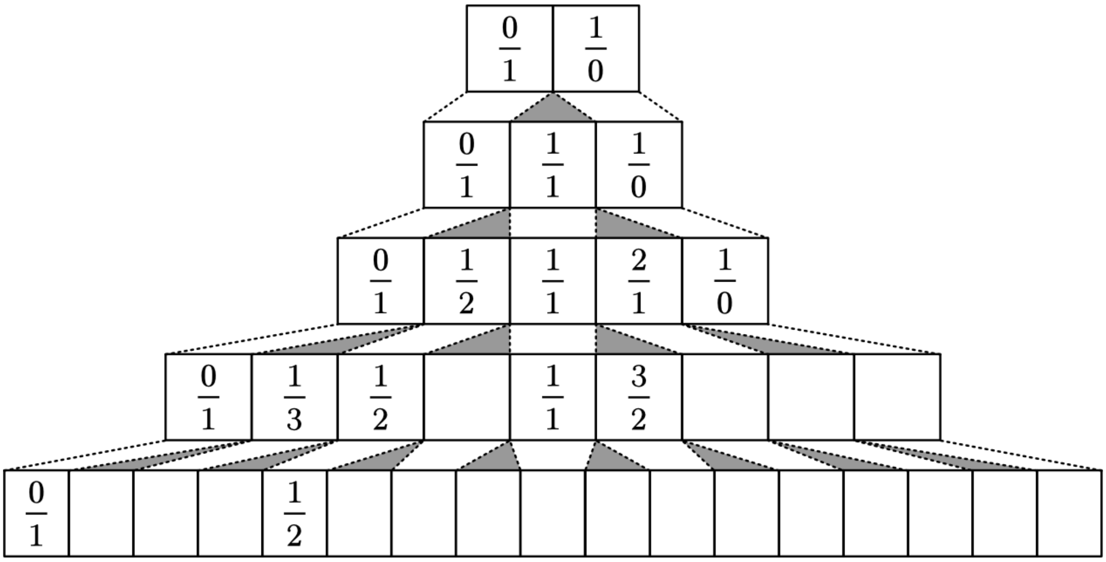
1) Compléter le tableau en annexe qui donne des exemples.

2) Pour un mot M, conjecturer les expressions de $\mathcal{F}$(DM) et $\mathcal{F}(\overline{M})$ en fonction de $\mathcal{F}(M)$.

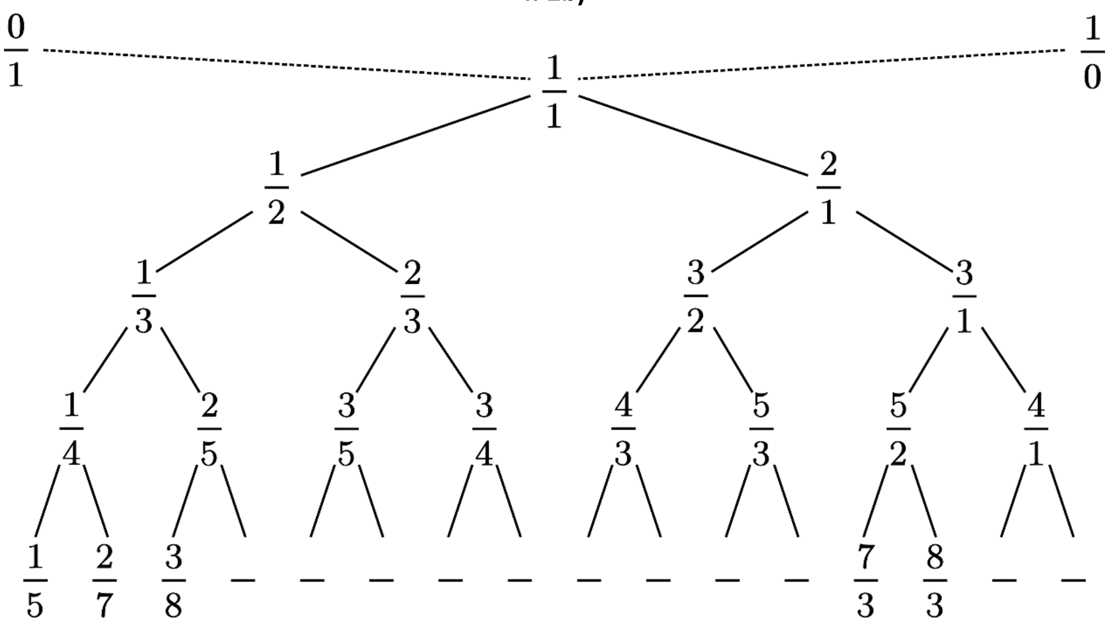
3) En admettant ces conjectures, déterminer la relation de récurrence vérifiée par la suite (x_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par x_n=$\mathcal{F}(A_n)$ où A_n est défini à la question **II. 4)**

ANNEXE à l'exercice « L'arbre de Stern-Brocot » à compléter et à rendre avec votre copie.

I. 2a)



I. 2b)



III. 1)

M	$\mathcal{F}(M)$	DM	$\mathcal{F}(\mathrm{D}M)$	$\overline{M}$	$\mathcal{F}(\overline{M})$
DGD	5/3	DDGD	8/3	GDG	3/5
GDD					
DDDD					
GGGG					
GGGD					
GDGD					

Exercice académique numéro 5 (à traiter par les candidats de la série S)

Construction

Pour chaque partie l'algorithme associé est donné en annexe.

<u>Partie 1</u> : On dispose d'un algorithme (cf annexe 1) permettant de tracer des figures en entrant une longueur L, un angle α et une suite d'instructions *m*.
Par exemple, avec *L* = 10, α = 90 et *m* = *AdAdAdA*, l'algorithme permet d'obtenir un carré de côté 10 cm.

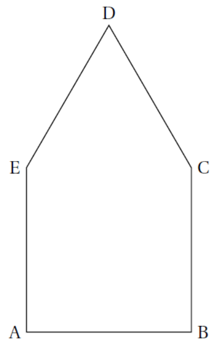


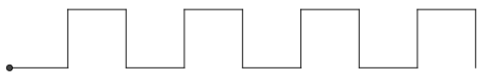
Figure « maison »

1. Faire la construction par l'algorithme avec les données suivantes :
   - **a.** *L = 5, α = 90* et *m = AAgAgAAgA*.
   - **b.** *L = 5, α = 60* et *m = AgAggAgA*.
   - **c.** Quelles figures obtenez-vous ?
2. Déterminer L, α et *m* pour :
   - **a.** tracer un triangle équilatéral de côté 10 cm
   - **b.** tracer un rectangle de dimensions 4 cm et 6 cm
   - **c.** tracer la « figure maison » sachant que ABCE est un carré et AB = BC = CD = DE = EA = 1 cm. On commencera par *A.*

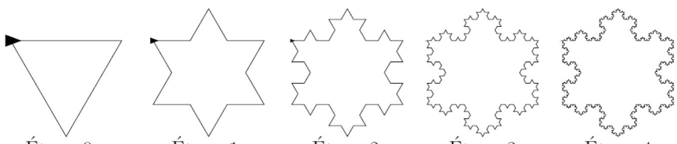
<u>Partie 2</u> : On décide d'introduire dans l'algorithme une variable de répétition *n*.

Par exemple, L= 5, α = 90, *m* = Ad et *n* = 4 permet de tracer un carré de côté 5 cm.

1. Faire les constructions avec les données suivantes :
   - ***a.*** *L= 2, α = 90, m = AgAd* et *n = 4*
   - **b.** *L=2, α = 90, m = Ad* et *n = 125 ;*
2. Déterminer *L*, α, *m* et *n* pour tracer la figure ci-dessous sachant que les segments sont de longueur 1 cm :



<u>Partie 3 :</u> On cherche à faire évoluer les figures d'une étape à l'autre. Prenons par exemple le flocon de Von Koch (l'échelle a été divisée par trois à chaque étape pour une meilleur visibilité mais tous les segments ont la même longueur) :



Étape 0 Étape 1 Étape 2 Étape 3 Étape 4

Avec L = 1, α = 60, *m* = *AddAddA*, *n =5* et *F = AgAddAgA* on obtient les 5 figures ci-dessus. En effet,

Étape 0 : *A* *dd* *A* *dd* *A* *;*
Étape 1 : $\overbrace{AgAddAgA}$ *dd* $\overbrace{AgAddAgA}$ *dd* $\overbrace{AgAddAgA}$ *;*

À chaque étape, chaque lettre *A* est remplacé par la forme *F = AgAddAgA.*

Construire les 3 figures obtenues avec L= 1, α = 90, *m* = *A*, *n = 3* et *F = AgAdAdAgA.*

Annexe : sujet Construction

Annexe 1 de la partie 1

Variables : L une longueur en cm
α un angle en degré
m un motif composé des lettres A, d et g.
Initialisation : Demander la valeur de L
Demander la valeur de α
Demander le motif m
Traitement : Pour chaque lettre de m lu de gauche à droite
Si la lettre est A alors avancer de L ;
Si la lettre est d alors tourner à droite avec un angle de α degré ;
Si la lettre est g alors tourner à gauche avec un angle de α degré.
Fin Pour
Sortie : Afficher la figure

Annexe 2 de la partie 2

Variables : L une longueur en cm
α un angle en degré
m un motif composé des lettres A, d et g.
n un nombre entier naturel
Initialisation : Demander la valeur de L
Demander la valeur de α
Demander le motif m
Demander la valeur de n
Traitement : Répéter n fois :
Pour chaque lettre de m lu de gauche à droite
Si la lettre est A alors avancer de L ;
Si la lettre est d alors tourner à droite avec un angle de α degré ;
Si la lettre est g alors tourner à gauche avec un angle de α degré.
Fin Pour
Fin Répéter
Sortie : Afficher la figure

Annexe 3 de la partie 3

Variables : L une longueur en cm
α un angle en degré
m un motif composé des lettres A, d et g.
n un nombre entier naturel
F une forme composée de A,d et g
Initialisation : Demander la valeur de L
Demander la valeur de α
Demander le motif m
Demander la valeur de n
Demander la forme F
Traitement : Répéter n fois :
Pour chaque lettre de m lu de gauche à droite
Si la lettre est A alors avancer de L ;
Si la lettre est d alors tourner à droite avec un angle de α degré ;
Si la lettre est g alors tourner à gauche avec un angle de α degré ;
Afficher la figure ;
Changer dans le motif m toutes les lettres A en F.
Fin Pour
Fin Répéter

Exercice académique numéro 6 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Des paniers surprises

Partie A

1. Mon panier contient 10 articles avec que des objets à 0,40 € l'unité et des objets à 2,40 € l'unité. Sachant que le cout total des articles est 10 €, déterminer la composition du panier.
2. Léa affirme qu'elle a également 10 articles dans son panier pour un cout total de 10 € et cependant son panier contient que des objets à 0,30 € l'unité et des objets à 2,40 € l'unité. Qu'en pensez-vous ?
3. Martin se rappelle bien que dans son panier il avait également 10 articles pour un cout total de 10 €. Dans son panier, il a effectivement des objets à 0,30 € l'unité et des objets à *m* € l'unité avec *m* ayant 2 décimales. Donner toutes les compositions possibles des paniers, en précisant à chaque fois la valeur de *m* correspondante.

Partie B

1. Mon panier contient 50 articles avec que des articles à 0,50 € l'unité et des articles à 2,50 € l'unité et des articles à 2 € l'unité. Le cout total des 50 articles est 50 €.
   a. Montrer que la situation peut-être modélisée par : $\begin{cases} 0{,}5x + 2{,}5y + 2z = 50 \\ x + y + z = 50 \end{cases}$.
   b. Démontrer qu'alors $y = 3x - 100$.
   c. Donner toutes les compositions possibles de mon panier.

2. Cette fois-ci, le panier de Léa contient 50 articles dont certains à 0,30 € l'unité, d'autres à 1,20 € l'unité et les autres à 2,50 € l'unité.
   Le cout total de tous les articles est de 50 €.

   a. Démontrer que dans ce cas, $y = \dfrac{75 - 2{,}2x}{1{,}3}$
   b. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il détermine la composition du panier.
   c. Déterminer toutes les compositions possibles du panier.

```
Variables :
x, y et z sont des nombres réels

Initialisation :
 x prend la valeur 1

Traitement :
Tant que x ≤ ⋯
y prend la valeur ….
   Si y est un nombre entier naturel strictement positif  alors
         z prend la valeur …
         Afficher x, y et z
   Fin si
x prend la valeur x+1
Fin tant que
```

3. Le panier de Martin contient lui aussi 50 articles pour un cout total de 50 € avec que des objets à 0,30 € l'unité, des objets à 1,20 € l'unité et des articles à *m* euros l'unité. Il ne se souvient si la valeur de *m* est de 1,30 € ou de 1,40 €
   a. Démontrer qu'alors $y = \dfrac{50(m-1) - (m-0{,}3)x}{m - 1{,}2}$
   b. Recopier et modifier l'algorithme pour qu'il aide Martin à déterminer la composition du panier.