OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION DE 2008

CLASSE DE PREMIERE, SERIE S

DUREE : 4 HEURES

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.
Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu le plus grand compte, dans l'appréciation des copies, de la clarté et de la rigueur du raisonnement.

EXERCICE 1 :

Un problème de cylindre

Les 2 expériences décrites ci-dessous sont indépendantes.

1. A l'intérieur d'un cylindre rempli d'eau, on emboîte parfaitement 3 sphères de telle sorte que la hauteur de l'ensemble des 3 sphères soit égale à la hauteur du cylindre. Ce qui signifie que le rayon des sphères est le même que celui du cylindre. La quantité d'eau restant à l'intérieur du cylindre peut-elle être de 1 litre ?

2. A l'intérieur d'un cylindre rempli d'eau, on emboîte parfaitement une sphère puis un cône de révolution de même rayon que celui de cylindre de telle sorte que la hauteur de l'ensemble cône-sphère soit égale à la hauteur du cylindre. La quantité d'eau restant à l'intérieur du cylindre est de 1 litre.
   a) Sachant que le rayon du cylindre est de 5 cm, calculer la hauteur du cylindre.
   b) Sachant que la hauteur du cylindre est de 20 cm, déterminer le rayon du cylindre.

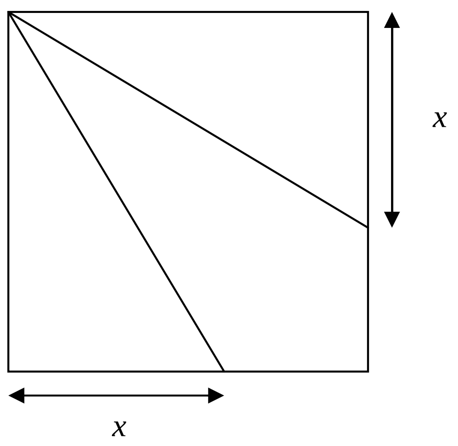
   On pourra utiliser les formules suivantes :
   Volume du cylindre : $\pi R^2 h$

   Volume du cône de révolution : $\frac{1}{3}\pi R^2 h$

   Volume de la sphère : $\frac{4}{3}\pi R^3$

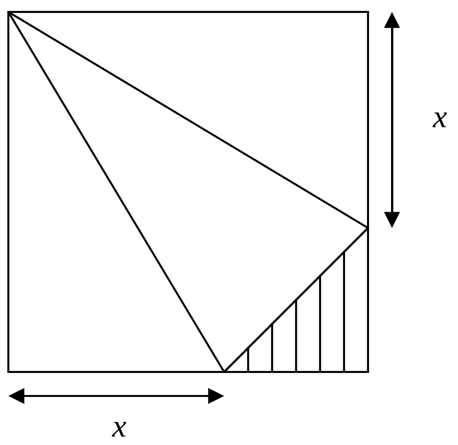
EXERCICE 2 :

Un partage équitable



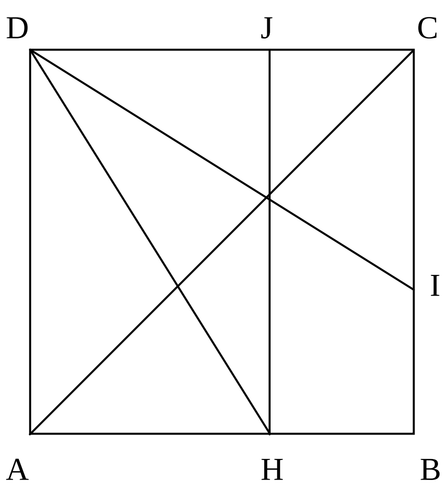
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

EXERCICE 3 :

Problème des 3 chèvres

A chaque sommet d'un triangle équilatéral de 48 m de côté est attachée une chèvre à l'aide d'une corde. Les secteurs angulaires décrits par les chèvres, supposées ponctuelles, ne peuvent pas se croiser (au plus tangents).

1. Chaque chèvre a une corde de 24 m de longueur. Quelle est la superficie que les trois chèvres peuvent brouter ?
2. Une des trois chèvres a une corde de 32 m de longueur. Quelle est la superficie que les trois chèvres peuvent brouter ?
3. Aucune chèvre ne peut avoir une corde plus longue que la distance qui sépare son point d'attache au côté opposé. Déterminer la superficie maximale que les trois chèvres peuvent brouter.

EXERCICE 4 :

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.

On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2=1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3=1+2$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\neq 1$; $3=1+1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Remarque : pour une résolution complète de ce problème, on pourra consulter la publication *quadrature, n°3, avril 1990*.